Title	Continuous geometry ニ就テ, II
Author(s)	古屋, 茂; 小平, 邦彦
Citation	全国紙上数学談話会. 168 p.593-p.609
Issue Date	1939-11-01
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74670
rights	
Note	

740. Continuous geometry ニ就テ. II

古屋 茂
小平邦彦 (東大)

§ 3. L-number

定義 8. $\pi = \begin{pmatrix} j^{(1)} \cdots\cdots j^{(m)} \\ k^{(1)} \cdots\cdots k^{(m)} \end{pmatrix}$ ガ與ヘラレタトキ

$j_1^{(\mu)} = j^{(\mu)}$, $j_\sigma^{(\mu)} = k^{(\mu)}$, $\mu \neq \mu_\rho$ ナラバ $j_\rho^{(\mu)} = j_{\rho+1}^{(\mu)}$ トナル $j_\rho^{(\mu)}$ ヲ任意ニ定メ

$$P\begin{pmatrix} j^{(1)} \cdots\cdots j^{(m)} \\ k^{(1)} \cdots\cdots k^{(m)} \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} j_1^{(1)} \cdots\cdots j_1^{(m)} \\ j_2^{(1)} \cdots\cdots j_2^{(m)} \end{pmatrix} \cdots\cdots P\begin{pmatrix} j_{\sigma-1}^{(1)} \cdots j_{\sigma-1}^{(m)} \\ j_\sigma^{(1)} \cdots j_\sigma^{(m)} \end{pmatrix}$$

ニヨツテ $P(\pi)$ ヲ定義スル。

定義 9.[7] $b_{ij}\,P\begin{pmatrix} i\,j \\ k\,k \end{pmatrix} = b_{kk}$ ナル b_{ij} ノ system (b_{ij}) ヲ L-number ト名付ケ $\beta = (b_{ij})$ デアラハス。b_{ij} ヲ β ノ i, j-coordinate トイヒ $b_{ij} = (\beta)_{ij}$ トカク。

コノ定義ニ於テ β ハソノ一ツノ coordinate $(\beta)_{ij}$ デ定スルコトハ明ケデアル。

コレカラ L-number ノ積ヲ考ヘル。積ハ簡單デアル。

定義 10.[8] i) $(\beta)_{ij} \otimes (\gamma)_{jk} = (\delta)_{ik}$ ナル關係ニヨツテ δ ガ i, j, k ニ關係ナク一意的ニキマル。ソコデ $\delta = \gamma\beta$ ト定義スル。

ii) $(0)_{ij} = \mathfrak{a}_i$, $(1)_{ij} = \mathfrak{c}_{ij}$ ニヨッテ 0 及ビ 1 ヲ定義スル。

Lemma 7.

i) $(\gamma \cdot \beta) \cdot \alpha = \gamma \cdot (\beta \cdot \alpha)$

ii) $\beta \cdot 0 = 0 \cdot \beta = 0$

iii) $\beta \cdot 1 = 1 \cdot \beta = \beta$

証明

i) Lemma 3 ニヨッテ明白。

ii) $(\beta \cdot 0)_{ik} = (\mathfrak{a}_i \cup (\beta)_{ik})(\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_k) = \mathfrak{a}_i$

$(0 \cdot \beta)_{ik} = ((\beta)_{ij} \cup \mathfrak{a}_j)(\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_k) = \mathfrak{a}_i$

iii) Lemma 5, iii) ニヨル。

次ニ L-number ノ和ヲ考ヘル。

定義 11. $\sum \mathfrak{a}^{(j)} \underset{\mathfrak{g}}{\sim} \sum \mathfrak{b}^{(j)}$, $\mathfrak{a}^{(j)} \underset{\mathfrak{g}}{\sim} \mathfrak{b}^{(j)}$ トナルトキ

之レヲ $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'', \cdots\cdots) \underset{\mathfrak{g}}{\sim} (\mathfrak{b}', \mathfrak{b}'', \cdots\cdots)$ デアラハス。

或ハ簡単ノタメ $(\mathfrak{a}^{(j)}) \underset{\mathfrak{g}}{\sim} (\mathfrak{b}^{(j)})$ トモカク。

定義 12. $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cup \mathfrak{c} = \mathfrak{c} \cup \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}\mathfrak{a} = 0$ ナルトキ $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})\, l$ トカク。

Lemma 8.

i) $\mathfrak{a} \underset{\mathfrak{g}}{\sim} \mathfrak{b}$, $(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{g})\mathfrak{c} = 0$ ナラバ

$$\mathfrak{a} \cup \mathfrak{c} \underset{\mathfrak{g}}{\sim} \mathfrak{b} \cup \mathfrak{c}$$

ii) $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})\, l$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \underset{\mathfrak{g}}{\sim} (\mathfrak{a}', \mathfrak{b}')$ ナルトキ

$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) \underset{\mathfrak{y}}{\sim} (\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}')$, $(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}')\ell$

ナル $\mathfrak{c}'$ガ存在シテ一意的ニキマル。

証明 i) $(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{c})\mathfrak{y} = (\mathfrak{b} \cup \mathfrak{c})\mathfrak{y} = 0$,

$$\mathfrak{a} \cup \mathfrak{c} \cup \mathfrak{y} = \mathfrak{b} \cup \mathfrak{c} \cup \mathfrak{y}.$$

ii) $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b} \underset{\mathfrak{y}}{\sim} \mathfrak{a}' \cup \mathfrak{b}'$ ニヨッテ $\mathfrak{c} \leqq \mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ ニ $\mathfrak{c}' \leqq \mathfrak{a}' \cup \mathfrak{b}'$

ガ一意的ニ對應スル。

Lemma 9.[9] $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{z}, \mathfrak{q})\ell$, $(\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{z} \cup \mathfrak{q})\mathfrak{a}_j = 0$ トスル。コノトキ $\mathfrak{u}_{ij}$, $\mathfrak{v}_{ij} \in L_{ij}$ ヲ任意ニ與ヘレバ

$$(\mathfrak{a}_i\ \mathfrak{z}\ \mathfrak{q}) \underset{\mathfrak{a}_j}{\sim} (\mathfrak{u}_{ij}\ \mathfrak{z}\ \mathfrak{y}) \underset{\mathfrak{a}_j}{\sim} (\mathfrak{v}_{ij}\ \mathfrak{x}\ \mathfrak{q})$$

$$\underset{\mathfrak{a}_j}{\sim} (\mathfrak{w}\ \mathfrak{x}\ \mathfrak{y})$$

ニヨッテ $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}$ 及ビ $\mathfrak{w} \in L_{ij}$ ガ定マル。コノ $\mathfrak{w}$ ヲ

$\mathfrak{w} = \mathfrak{u}_{ij} \boxplus_{\mathfrak{z}\mathfrak{q}} \mathfrak{v}_{ij}$ トカケバ ($\boxplus_{\mathfrak{z}\mathfrak{q}}$ ノ定義!)

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{u}_{ij} \boxplus_{\mathfrak{z}\mathfrak{q}} \mathfrak{v}_{ij}$$

$$= \big((\mathfrak{u}_{ij} \cup \mathfrak{z})(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{q}) \cup (\mathfrak{v}_{ij} \cup \mathfrak{q})(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{z})\big)(\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_j)$$

証明: $\mathfrak{w}$ ガキマルコトハ Lemma 8 ヨリ分ル。又

$\mathfrak{a}_i \underset{\mathfrak{a}_j}{\sim} \mathfrak{w}$ ナル故 $\mathfrak{w} \in L_{ij}$. 次ニ $\mathfrak{y} = (\mathfrak{u}_{ij} \cup \mathfrak{z})(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{q})$.

$\mathfrak{x} = (\mathfrak{v}_{ij} \cup \mathfrak{q})(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{z})$.

シカルニ $\mathfrak{w} = (\mathfrak{v}_{ij} \cup \mathfrak{a}_j)(\mathfrak{y} \cup \mathfrak{x})$

従ッテ $\mathfrak{w} = (\mathfrak{y} \cup \mathfrak{x})(\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_j)$

Lemma 10. $(\alpha)_{ij} = (\beta)_{ij} \boxplus_{\mathfrak{c}_{ik}\mathfrak{a}_k} (\gamma)_{ij}$ ナル關係ハ i, j, k ニハ關係シナイ。

証明: $\left((\beta)_{ij} \boxplus_{\mathfrak{c}_{ik}\mathfrak{a}_k} (\gamma)_{ij}\right) P\begin{pmatrix} i & j & k \\ p & q & r \end{pmatrix}$

$$= (\beta)_{pq} \boxplus_{\mathfrak{c}_{pr}\mathfrak{a}_r} (\gamma)_{pq}$$

定義 13. *Lemma* 10ニヨツテ

$(\alpha)_{ij} = (\beta)_{ij} \boxplus_{\mathfrak{c}_{ik}\mathfrak{a}_k} (\gamma)_{ij}$ ナルトキ $\alpha = \beta + \gamma$ ト定義スル。 又簡単ノ為メ

$$(\beta)_{ij} \boxplus_k (\gamma)_{ij} = (\beta)_{ij} \boxplus_{\mathfrak{c}_{ik}\mathfrak{a}_k} (\gamma)_{ij} \text{ トスル。}$$

Lemma 11. $(\mathfrak{a}, \mathfrak{x}, \mathfrak{b})\, l$, $(\mathfrak{b}, \mathfrak{y}, \mathfrak{c})\, l$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) \perp$ ナルトキ $(\mathfrak{a}, (\mathfrak{x} \cup \mathfrak{y})(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{c}), \mathfrak{c})\, l$.

証明: $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{x} \cup \mathfrak{y})(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}(\mathfrak{x} \cup (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})\mathfrak{y}) = 0$

$$\mathfrak{a} \cup (\mathfrak{x} \cup \mathfrak{y})(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cup \mathfrak{c}$$

Lemma 12. $(\mathfrak{a}_i\ \mathfrak{z}\ \mathfrak{q})\, l$, $(\mathfrak{a}_i\ \mathfrak{z}'\ \mathfrak{q}')\, l$, $(\mathfrak{a}_i\ \mathfrak{a}_j\ \mathfrak{q}\ \mathfrak{q}') \perp$ ナラバ

i) $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z} \cup \mathfrak{z}')(\mathfrak{q} \cup \mathfrak{q}')$ トオケバ

$$(\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}_j\ \mathfrak{z}\ \mathfrak{q}) \underset{\mathfrak{z}}{\sim} (\mathfrak{a}_i\ \mathfrak{a}_j\ \mathfrak{z}'\ \mathfrak{q}')$$

ii) $\breve{\mathfrak{u}}_{ij} \boxplus_{\mathfrak{z}\mathfrak{q}} \mathfrak{v}_{ij} = \breve{\mathfrak{u}}_{ij} \boxplus_{\mathfrak{z}'\mathfrak{q}'} \mathfrak{v}_{ij}$

証明: i) *Lemma* 11ニヨツテ $(\mathfrak{q}, \mathfrak{z}, \mathfrak{q}')\, l$,

故ニ $(\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{q}) \underset{\mathfrak{z}}{\sim} (\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{q}')$

又明ラカニ $\mathfrak{z} \cup \mathfrak{z} = \mathfrak{z}' \cup \mathfrak{z}$

ii) 上ノ i) ニヨツテ容易ニ分ル。

Lemma 13[10] $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

証明: $\widetilde{\mathfrak{a}_j}$ ヲ $\underset{j}{\sim}$ デアラハスコトニスル。

1) $(\mathfrak{a}_i\ \mathfrak{c}_{ik}\ \mathfrak{a}_k) \underset{j}{\sim} ((\alpha)_{ij}\ \mathfrak{c}_{ik}\ \mathfrak{x}) \underset{j}{\sim} ((\beta)_{ij}\ \mathfrak{y}\ \mathfrak{a}_k)$

$$\underset{j}{\sim} ((\alpha + \beta)_{ij}\ \mathfrak{y}\ \mathfrak{x})$$

2) $(\mathfrak{a}_i \quad \mathfrak{c}_{ik} \quad \mathfrak{a}_k) \widetilde{j} (\mathfrak{a}_i \quad \mathfrak{z} \quad \mathfrak{y})$

ニヨッテ $\mathfrak{y}$ ヲ定メル。コノトキ $(\mathfrak{a}_i \quad \mathfrak{a}_j \quad \mathfrak{y} \quad \mathfrak{a}_l) \perp$ ナル故

$$\boxplus_{\mathfrak{z}\,\mathfrak{y}} = \boxplus_l = \boxplus_k$$

ソコデ $(\alpha+\beta)+\gamma$ ヲ $(\alpha+\beta)_{ij}$ $\boxplus_{\mathfrak{z}\,\eta}$ $(\gamma)_{ij}$ デキメレバ 1), 2) ニヨッテ

3) $(\mathfrak{a}_i \quad \mathfrak{z} \quad \mathfrak{y}) \widetilde{j} ((\alpha+\beta)_{ij} \quad \mathfrak{z} \quad \mathfrak{x}) \widetilde{j} ((\gamma)_{ij} \quad \mathfrak{z} \quad \eta)$
$\widetilde{j} (((\alpha+\beta)+\gamma)_{ij} \quad \mathfrak{z} \quad \mathfrak{x})$

同様ニ $(\beta)_{ij}$ $\boxplus_{\mathfrak{z}\,\eta}$ $(\gamma)_{ij}$ ヲ作レバ 1), 2), 3) ヨリ

4) $(\mathfrak{a}_i \quad \mathfrak{z} \quad \mathfrak{y}) \widetilde{j} ((\beta)_{ij} \quad \mathfrak{z} \quad \mathfrak{a}_k) \widetilde{j} ((\gamma)_{ij} \quad \mathfrak{z} \quad \mathfrak{y})$
$\widetilde{j} ((\beta+\gamma)_{ij} \quad \mathfrak{z} \quad \mathfrak{a}_k)$

従ッテ $((\alpha+\beta)+\gamma)_{ij}$ ハ

5) $(\mathfrak{a}_i \quad \mathfrak{c}_{ik} \quad \mathfrak{a}_k) \widetilde{j} ((\alpha)_{ij} \quad \mathfrak{c}_{ik} \quad \mathfrak{x}) \widetilde{j} ((\beta+\gamma)_{ij} \quad \mathfrak{z} \quad \mathfrak{a}_k)$
$\widetilde{j} ((\alpha+(\beta+\gamma))_{ij} \quad \mathfrak{z}, \quad \mathfrak{x})$

故ニ 2) ニヨッテ 3), 5) ヲ比スレバ

$$((\alpha+\beta)+\gamma)_{ij} = (\alpha+(\beta+\gamma))_{ij}$$

$$\therefore \quad (\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$$

Lemma 14. i) $\beta+\gamma = \gamma+\beta$

ii) $0+\beta = \beta+0 = \beta$

iii) β ニ對シテ $\beta+\xi = 0$ ナル ξ ガ存在スル。

証明:

i) Lemma 12 ニ於テ $\mathfrak{z} = \mathfrak{c}_{ik}$, $\eta = \mathfrak{a}_k$, $\mathfrak{z}' = \mathfrak{a}_l$, $\eta' = \mathfrak{c}_{il}$ トレデ

$$(\beta)_{ij} \boxplus_{\mathfrak{c}_{il}\,\mathfrak{a}_l} (\gamma)_{ij} = (\gamma)_{ij} \boxplus_{\mathfrak{a}_l\,\mathfrak{c}_{il}} (\beta)_{ij}$$

$= (\gamma)_{ij} \boxplus \mathfrak{c}_{ik}\, \mathfrak{a}_k\, (\beta)_{ij}$

ii) $(0)_{ij} = \mathfrak{a}_i$ ナル故

$(\mathfrak{a}_i \ \mathfrak{c}_{ik} \ \mathfrak{a}_k) \ \widetilde{j}\ ((0)_{ij} \ \mathfrak{c}_{ik} \ \mathfrak{a}_k) \ \widetilde{j}\ ((\beta)_{ij} \ \mathfrak{y} \ \mathfrak{a}_k)$

$\widetilde{j}\ ((0+\beta)_{ij} \ \mathfrak{y} \ \mathfrak{a}_k)$

故＝ $(0+\beta)_{ij} = (\beta)_{ij} \qquad 0+\beta = \beta$

$\therefore \quad \beta + 0 = 0 + \beta = \beta$

iii) $(\mathfrak{a}_i \ \mathfrak{c}_{ik} \ \mathfrak{a}_k) \ \widetilde{j}\ ((\beta)_{ij} \ \mathfrak{y} \ \mathfrak{a}_k) \ \widetilde{j}\ (\mathfrak{a}_i \ \mathfrak{y} \ \mathfrak{a}_j)$

$\widetilde{j}\ ((\xi)_{ij} \ \mathfrak{c}_{ik} \ \mathfrak{a}_j)$

＝ヨツテ ξ ヲ定メル。コノトキ明カ＝

$(\mathfrak{a}_i \ \mathfrak{c}_{ik} \ \mathfrak{a}_k) \ \widetilde{j}\ ((\xi)_{ij} \ \mathfrak{c}_{ik} \ \mathfrak{a}_j) \ \widetilde{j}\ ((\beta)_{ij} \ \mathfrak{y} \ \mathfrak{a}_k)$

$\widetilde{j}\ (\mathfrak{a}_i \ \mathfrak{y} \ \mathfrak{a}_j)$

故＝ $(\xi+\beta)_{ij} = \mathfrak{a}_i \qquad \xi + \beta = 0$

定義 13. $\mathfrak{u} \leqq \mathfrak{a}_j^m$ ナルトキ

$$\mathfrak{u} \circ (\gamma)_{ij} = (\mathfrak{u} \cup (\gamma)_{ij})\, \mathfrak{a}_i^m$$

$$(\gamma)_{ji} \circ \mathfrak{u} = (\mathfrak{u} \cup (\gamma)_{ji})\, \mathfrak{a}_i^m$$

Lemma 15.

i) $(\mathfrak{u} \cup \mathfrak{v}) \circ (\gamma)_{ij} = (\mathfrak{u} \circ (\gamma)_{ij}) \cup (\mathfrak{v} \circ (\gamma)_{ij})$

ii) $(\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v}) \circ (\gamma)_{ij} \leqq (\mathfrak{u} \circ (\gamma)_{ij}) \cdot (\mathfrak{v} \circ (\gamma)_{ij})$

iii) $(\beta)_{ki} \circ (\gamma)_{ij} = (\gamma\beta)_{kj}$

iv) $\mathfrak{a}_i \circ (\gamma)_{ij} \leqq \mathfrak{a}_j$

v) $\mathfrak{u} \leqq \sum \mathfrak{a}_l \ (l \neq i, j)$ ナラバ $\mathfrak{u} \circ (\gamma)_{ij} = \mathfrak{u}$

vi) $(\gamma)_{ik} \circ (\gamma)_{ij} \leqq \mathfrak{c}_{kj}$

証明:　i) $(\mathfrak{u} \cup (\gamma)_{ij})\mathfrak{a}_i^m \cup (\mathfrak{v} \cup (\gamma)_{ij})\mathfrak{a}_i^m$

$$= ((\mathfrak{u} \cup (\gamma)_{ij})\mathfrak{a}_i^m \cup \mathfrak{v} \cup (\gamma)_{ij})\mathfrak{a}_i^m$$
$$= ((\mathfrak{u} \cup (\gamma)_{ij})(\mathfrak{a}_i^m \cup (\gamma)_{ij}) \cup \mathfrak{v})\mathfrak{a}_i^m$$
$$= (\mathfrak{u} \cup \mathfrak{v} \cup (\gamma)_{ij})\mathfrak{a}_i^m$$

vi) $((\gamma)_{ik} \cup (\gamma)_{ij})\mathfrak{a}_i^m = (((\gamma)_{ij} \cup \mathfrak{c}_{jk})(\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_k) \cup (\gamma)_{ij})\mathfrak{a}_i^m$

$$= ((\gamma)_{ij} \cup \mathfrak{c}_{jk})((\gamma)_{ij} \cup \mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_k)\mathfrak{a}_i^m$$
$$\leqq (\gamma)_{ij}\mathfrak{a}_i^m \cup \mathfrak{c}_{jk} = \mathfrak{c}_{jk}$$

ii), iii), iv), v) ハ定義ニヨリ明白.

Lemma 16.

i) $(\gamma)_{ji} \circ (\mathfrak{u} \cup \mathfrak{v}) \geqq ((\gamma)_{ji} \circ \mathfrak{u}) \cup ((\gamma)_{ji} \circ \mathfrak{v})$

ii) $(\gamma)_{ji} \circ \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v} = ((\gamma)_{ji} \circ \mathfrak{u})((\gamma)_{ji} \circ \mathfrak{v})$

iii) $(\gamma)_{ji} \circ (\xi)_{ik} = (\xi\gamma)_{jk}$

iv) $(\gamma)_{ji} \circ \mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_j$

v) $\mathfrak{u} \leqq \sum \mathfrak{a}_l \ (l \neq i, j)$ ナルトキ $(\gamma)_{ji} \circ \mathfrak{u} \geqq \mathfrak{u}$

vi) $(\gamma)_{ji} \circ (\gamma)_{ki} \geqq \mathfrak{c}_{jk}$

証明:　i), iii), iv), v) ハ明白デアル.

ii) $((\gamma)_{ji} \cup \mathfrak{u})((\gamma)_{ji} \cup \mathfrak{v})\mathfrak{a}_i^m = ((\gamma)_{ji} \cup \mathfrak{u}((\gamma)_{ji} \cup \mathfrak{v}))\mathfrak{a}_i^m$

$$= ((\gamma)_{ji} \cup \mathfrak{u}\mathfrak{v})\mathfrak{a}_i^m$$

vi) $((\gamma)_{ji} \cup (\gamma)_{ki}) \cdot \mathfrak{a}_i^m = ((\mathfrak{c}_{jk} \cup (\gamma)_{ki})(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{a}_i) \cup (\gamma)_{ki})\mathfrak{a}_i^m$

$$= (\mathfrak{c}_{jk} \cup (\gamma)_{ki})(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{a}_i \cup (\gamma)_{ki})\mathfrak{a}_i^m$$
$$= (\mathfrak{c}_{jk} \cup (\gamma)_{ki})\mathfrak{a}_i^m \geqq \mathfrak{c}_{jk}$$

Lemma 17.　$\mathfrak{a} \overset{\frown}{\mathfrak{c}} \mathfrak{b}$,　$\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ ナラバ $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

従ッテ特ニ $(\beta)_{ij} \leqq (\gamma)_{ij}$ ナラバ $\beta = \gamma$

証明:　$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(\mathfrak{b} \cup \mathfrak{c}) = \mathfrak{b}(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}$

Lemma 18. $\xi(\beta+\gamma)=\xi\beta+\xi\gamma$

証明: $(\xi(\beta+\gamma))_{kj}=(\beta+\gamma)_{ki}\circ(\xi)_{ij}$

$=((\beta)_{ki}\ 田_e\ (\gamma)_{ki})\circ(\xi)_{ij}$

$=(((\beta)_{ei}\cup((\gamma)_{ki}\cup\alpha_e)(c_{ke}\cup\alpha_i))(\alpha_k\cup\alpha_i))\circ(\xi)_{ij}$

$\leqq(((\xi\beta)_{ej}\cup((\xi\gamma)_{ki}\cup\alpha_e)(c_{ke}\cup\alpha_j))(\alpha_k\cup\alpha_j)$

$=(\xi\beta+\xi\gamma)_{kj}$

Lemma 19.[17] $((\gamma)_{kj}\cup((\alpha)_{ij}\cup\alpha_k)((\beta)_{ik}\cup\alpha_j))(\alpha_i\cup\alpha_j)$

$=(\alpha+\gamma\beta)_{ij}$

証明: i) $y=((\alpha)_{ij}\cup\alpha_k)((\beta)_{ik}\cup\alpha_j)$,

$w=((\gamma)_{kj}\cup y)(\alpha_i\cup\alpha_j)$ トオケバ

$(\alpha_i\ (\beta)_{ik}\ \alpha_k)\ \widetilde{j}\ ((\alpha)_{ij}\ y\ \alpha_k)\ \widetilde{j}\ (w\ y\ (\gamma)_{kj})$

故ニ $w\in L_{ij}$.

ii) $w=w\circ(\gamma)_{kl}$

$\leqq(c_{je}\cup((\alpha)_{ij}\cup\alpha_e)((\gamma\beta)_{ie}\cup\alpha_j))(\alpha_i\cup\alpha_j)$

右辺ハ w ノ γ ヲ 1 デオキカヘタモノデアルカラ

$\in L_{ij}$

故ニ「$\leqq$」ハ「$=$」トナル。

$(\alpha+\gamma\beta)_{ij}=(\alpha+\gamma\beta)_{ij}\circ(\gamma\beta)_{kl}$

$=((\gamma\beta)_{kl}\cup((\alpha)_{ij}\cup\alpha_k)(c_{ik}\cup\alpha_j))(\alpha_i\cup\alpha_j)\circ(\gamma\beta)_{kl}$

$\leqq(c_{ej}\cup((\alpha)_{ij}\cup\alpha_e)((\gamma\beta)_{ie}\cup\alpha_j))(\alpha_i\cup\alpha_j)$

故ニ $w=(\alpha+\gamma\beta)_{ij}$

Lemma 20. $(\beta+\gamma)\xi=\beta\xi+\gamma\xi$

証明: Lemma 19 ニヨッテ

$$((\beta+\gamma)\xi)_{ej} = (\xi)_{ei} \circ (\beta+\gamma)_{ij}$$

$$=(\xi)_{ei} \circ (c_{kj} \cup ((\beta)_{ij} \cup \alpha_k)((\gamma)_{ik} \cup \alpha_j))(\alpha_i \cup \alpha_j)$$

$$\geqq (c_{kj} \cup ((\beta\xi)_{ej} \cup \alpha_k)((\gamma\xi)_{ek} \cup \alpha_j))(\alpha_e \cup \alpha_j)$$

$$=(\beta\xi+\gamma\xi)_{ej}$$

定理5. *L-number* ハ単位元 1 ヲ有スル *ring* ヲナス。

証明: *Lemma* 7, 13, 14, 18, 20ヨリ明カデアル。

homogeneous basis $(\alpha_i;\ i=1, \cdots\cdots n)$ ニ於テ α_i ガ凡テ「点」ノ場合即チ「$\xi < \alpha_i \longrightarrow \xi = 0$」ナル場合ニハ，コレカラ作ツタ *L-number* ノ全体ハ「*shiefkärper*」ヲナス証明: α_i ガ点デアルカラ $\beta \neq 0$ ナラバ $(\beta)_{ji} \in L_{ij}$. 故ニ $(\beta)_{ji} = (\gamma)_{ij}$ トオケバ

$$(\gamma\beta)_{ij} = ((\beta)_{ik} \cup (\gamma)_{kj})(\alpha_i \cup \alpha_j)$$

$$=((\beta)_{ik} \cup (\beta)_{jk})(\alpha_i \cup \alpha_j)$$

$$=((\beta)_{ik} \cup ((\beta)_{ik} \cup c_{ji})(\alpha_j \cup \alpha_k))(\alpha_i \cup \alpha_j)$$

$$=((\beta)_{ik} \cup c_{ji})(\alpha_i \cup \alpha_j) = c_{ij} = (1)_{ij}$$

同様ニシテ $(\beta\gamma)_{ij} = (1)_{ij}$

ソレ故 $\gamma\beta = \beta\gamma = 1$ 即チ $\gamma = \beta^{-1}$ トナル。

以下 *L-number* ノ作ル *ring* ヲ Γ デアラハス。

定義14. $(\beta)_m = ((\beta)_{jm} \cup \alpha_j)\alpha_m$

コノ定義ヨリ $(\beta)_m P\binom{m}{e} = (\beta)_e$ ハスグ分ル。

Lemma 21. $(\beta\gamma)_m \leqq (\beta)_m$

証明: $(\beta\gamma)_m = ((\beta\gamma)_{jm} \cup \alpha_j)\alpha_m$

$= (((\gamma)_{jk} \cup (\beta)_{km})(\alpha_j \cup \alpha_m) \cup \alpha_j)\alpha_m$

$= (\alpha_j \cup (\gamma)_{jk} \cup (\beta)_{km})(\alpha_j \cup \alpha_m)\alpha_m$

$\leqq (\alpha_j \cup \alpha_k \cup (\beta)_{km})\alpha_m = (\alpha_k \cup (\beta)_{km})\alpha_m = (\beta)_m$

Lemma 22. $u \leqq \alpha_m$ ナルトキ

$$(u \cup \alpha_k)c_{km} \circ (\gamma)_{kj} = (\gamma)_{mj}(u \cup \alpha_j)$$

証明: $(u \cup \alpha_k)c_{km} \circ (\gamma)_{kj}$

$= ((u \cup \alpha_k)c_{km} \cup ((\gamma)_{mj} \cup c_{km})(\alpha_k \cup \alpha_j))(\alpha_j \cup \alpha_m)$

$= ((\gamma)_{mj} \cup c_{km})((u \cup \alpha_k)c_{km} \cup \alpha_k \cup \alpha_j)(\alpha_j \cup \alpha_m)$

$= ((\gamma)_{mj} \cup c_{km})(u \cup \alpha_k \cup \alpha_j)(\alpha_j \cup \alpha_m)$

$= ((\gamma)_{mj} \cup c_{km})(u \cup \alpha_j)(\alpha_m \cup \alpha_j)$

$= ((\gamma)_{mj} \cup c_{km}\cdot(\alpha_m \cup \alpha_j))(u \cup \alpha_j)$

$= (\gamma)_{mj}(u \cup \alpha_j)$

Lemma 23. $u = u_m \leqq \alpha_m$ ニ對シテ $u_m = (\varepsilon)_m$, $\varepsilon^2 = \varepsilon$ ナル ε ガ存在スル。

証明: i) $v_m \leqq \alpha_m - u_m$ ヲ任意ニトツタトキ

$(u_m \cup \alpha_j)c_{jm} \cup v_m \in L_{mj}$ 何トナレバ

$(u_m \cup \alpha_j)c_{jm} \cup v_m \cup \alpha_j = u_m \cup \alpha_j \cup v_m = \alpha_m \cup \alpha_j$.

$((u_m \cup \alpha_j)c_{jm} \cup v_m)\alpha_j = ((u_m \cup \alpha_j)c_{jm} \cup v_m(u_m \cup \alpha_j))\alpha_j$

$= 0$

故ニ $(\varepsilon)_{mj} = (u_m \cup \alpha_j)c_{jm} \cup v_m$ ニヨツテ ε ヲ

キメレバ

$$(\varepsilon)_j=((\varepsilon)_{mj}\cup\mathfrak{a}_m)\mathfrak{a}_j=((\check{\mathfrak{u}}_m\cup\mathfrak{a}_j)\mathfrak{c}_{jm}\cup\mathfrak{a}_m)\mathfrak{a}_j$$

$$=((\check{\mathfrak{u}}_m\cup\mathfrak{a}_j)\mathfrak{c}_{jm}\cup\mathfrak{a}_m(\check{\mathfrak{u}}_m\cup\mathfrak{a}_j))\mathfrak{a}_j$$

$$=(\check{\mathfrak{u}}_m\cup\mathfrak{a}_j)(\check{\mathfrak{u}}_m\cup\mathfrak{c}_{jm})\mathfrak{a}_j$$

即チ $(\varepsilon)_j=\check{\mathfrak{u}}_m P\binom{m}{j}$ 　故ニ $(\varepsilon)_m=\check{\mathfrak{u}}_m$

ii) $(\varepsilon^2)_{mj}=(\varepsilon)_{mk}\circ(\varepsilon)_{kj}$

$$=((\check{\mathfrak{u}}_m\cup\mathfrak{a}_k)\mathfrak{c}_{km}\cup\mathfrak{v}_m)\circ(\varepsilon)_{kj}$$

$$=((\check{\mathfrak{u}}_m\cup\mathfrak{a}_k)\mathfrak{c}_{km}\circ(\varepsilon)_{kj})\cup\mathfrak{v}_m$$

$$=(\varepsilon)_{mj}(\check{\mathfrak{u}}_m\cup\mathfrak{a}_j)\cup\mathfrak{v}_m=(\varepsilon)_{mj}$$

(Lemma 22 ニヨル)　故ニ $\varepsilon^2=\varepsilon$

Lemma 24. $(\alpha)_m\leqq(\beta)_m$ ナラバ $\alpha=\beta\gamma$ ナル γ が存在スル。

証明: $\mathfrak{v}\in\mathfrak{a}_k-\mathfrak{a}_k(\beta)_{kj}$ ヲ任意ニトル。コノトキ $\mathfrak{w}=((\alpha)_{ij}\cup(\beta)_{kj})(\mathfrak{v}\cup\mathfrak{a}_i)$ トスル。

$$\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{a}_k=((\alpha)_{ij}\cup(\beta)_{kj})\mathfrak{v}$$

$$=((\alpha)_{ij}(\mathfrak{a}_k\cup\mathfrak{a}_j)\cup(\beta)_{kj})\mathfrak{v}=(\beta)_{kj}\mathfrak{v}=0$$

$$\mathfrak{w}\cup\mathfrak{a}_k=((\alpha)_{ij}\cup(\beta)_{kj})(\mathfrak{v}\cup\mathfrak{a}_i)\cup\mathfrak{v}\cup\mathfrak{a}_k(\beta)_{kj}$$

$$=((\alpha)_{ij}\cup(\beta)_{kj}\cup\mathfrak{v})(\mathfrak{a}_i\cup\mathfrak{a}_k)$$

$$=((\alpha)_{ij}\cup(\beta)_{kj}\cup\mathfrak{a}_k\cup\mathfrak{v})(\mathfrak{a}_i\cup\mathfrak{a}_k)$$

シカルニ $(\alpha)_{ij}\cup(\beta)_{kj}\cup\mathfrak{a}_k\cup\mathfrak{v}$

$$\geqq(\alpha)_{ij}\cup(\alpha)_{kj}\cup\mathfrak{a}_k\cup\mathfrak{v}\geqq\mathfrak{a}_i\cup\mathfrak{a}_k$$

故ニ $\mathfrak{w}\in L_{ik}$ トナルコトが分ッタ。ソコデ $\mathfrak{w}=(\gamma)_{ik}$ トオケバ

$(\beta\gamma)_{ij} = (\mathfrak{w} \cup (\beta)_{kj})(\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_j)$

$= ((\beta)_{kj} \cup (\alpha)_{ij}(\mathfrak{w} \cup \mathfrak{a}_i \cup (\beta)_{kj}))(\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_j)$

$= (\alpha)_{ij}(\mathfrak{w} \cup \mathfrak{a}_i \cup (\beta)_{kj}) \leqq (\alpha)_{ij} \qquad \therefore \ \alpha = \beta\gamma$

定理 6. γ ハ regular ring デアッテ $R_\gamma \cong L(\mathfrak{a}_k)$

證明： regular ring トナルコトハ Lemma 23 ヨリ分ル。

又 Lemma 21, 24 ヨリ $(\beta)_k$ ト $(\beta)_\gamma$ トハ一對一ニ對應シテ且ツ $(\beta)_k \geqq (\gamma)_k \longleftrightarrow (\beta)_\gamma \geqq (\gamma)_\gamma$ トナル。故ニ $R_\gamma \cong L(\mathfrak{a}_k)$.

§4[12] 補助定理

Lemma 25. $\mathfrak{u}_k \leqq \mathfrak{a}_k$, $\mathfrak{w}_k \leqq \mathfrak{a}_k - \mathfrak{u}_k$ トシテ $(\varepsilon)_{kj} = (\mathfrak{u}_k \cup \mathfrak{a}_j)\mathfrak{c}_{kj} \cup \mathfrak{w}_k$, $(\bar{\varepsilon})_{ik} = (\mathfrak{w}_i \cup \mathfrak{a}_k)\mathfrak{c}_{ik} \cup \mathfrak{u}_i$ ニヨッテ ε, $\bar{\varepsilon}$ ヲ作レバ $\varepsilon + \bar{\varepsilon} = 1$. （但シ $\mathfrak{u}_i = \mathfrak{u}_k P\binom{k}{i}$）.

證明: Lemma 19 ニヨッテ

$(\varepsilon + \bar{\varepsilon})_{ij} = (((\bar{\varepsilon})_{ik} \cup \mathfrak{a}_j)((\varepsilon)_{ij} \cup \mathfrak{a}_k) \cup \mathfrak{c}_{kj})(\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_j)$

$= (((\mathfrak{w}_i \cup \mathfrak{a}_k)\mathfrak{c}_{ik} \cup \mathfrak{u}_i \cup \mathfrak{a}_j)((\mathfrak{u}_i \cup \mathfrak{a}_j)\mathfrak{c}_{ij} \cup \mathfrak{w}_i \cup \mathfrak{a}_k)$
$\qquad \cup \mathfrak{c}_{kj})(\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_j)$

$= ((\mathfrak{u}_i \cup \mathfrak{a}_j)\mathfrak{c}_{ij} \cup (\mathfrak{w}_i \cup \mathfrak{a}_k)\mathfrak{c}_{ik}$
$\qquad \cup (\mathfrak{u}_i \cup \mathfrak{a}_j)(\mathfrak{w}_i \cup \mathfrak{a}_k) \cup \mathfrak{c}_{kj})(\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_j)$

$= (\mathfrak{u}_i \cup \mathfrak{a}_j)\mathfrak{c}_{ij} \cup ((\mathfrak{w}_i \cup \mathfrak{a}_k)\mathfrak{c}_{ik} \cup \mathfrak{c}_{kj})(\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_j)$

$= (\mathfrak{u}_i \cup \mathfrak{a}_j)\mathfrak{c}_{ij} \cup (\mathfrak{w}_i \cup \mathfrak{a}_j)\mathfrak{c}_{ij} = (\mathfrak{u}_i \cup \mathfrak{w}_i \cup \mathfrak{a}_j)\mathfrak{c}_{ij}$

$-\mathfrak{c}_{ij}-(1)_{ij}$.

Lemma 26. $\mathfrak{u}_k \leqq \mathfrak{a}_k$, $\mathfrak{v}_k \leqq \mathfrak{a}_k-\mathfrak{u}_k$, $\mathfrak{u}_k=(\beta)_k$, $\mathfrak{v}_k=(1-\beta)_k$, $\beta^2=\beta$ トスレバ

i) $(\xi\beta)_{kj}=(\xi)_{kj}(\mathfrak{a}_j\cup\mathfrak{u}_k)\cup\mathfrak{v}_k$

ii) $(\beta\xi)_{jk}=(\mathfrak{v}_k\cup(\xi)_{jk})(\mathfrak{u}_k\cup\mathfrak{a}_j)$

証明: i) $(\xi\beta)_{kj}=(\beta)_{ki}\circ(\xi)_{ij}$

$=((\mathfrak{u}_k\cup\mathfrak{a}_i)\mathfrak{c}_{ik}\circ(\xi)_{ij})\cup\mathfrak{v}_k$

$=(\xi)_{kj}(\mathfrak{a}_j\cup\mathfrak{u}_k)\cup\mathfrak{v}_k$ (Lemma 22 ニヨル)

ii) $(\beta\xi)_{jk}=((\beta\xi)_{ji}\cup\mathfrak{c}_{ik})(\mathfrak{a}_j\cup\mathfrak{a}_k)$

$=(((\xi)_{jk}\cup(\beta)_{ki})(\mathfrak{a}_j\cup\mathfrak{a}_i)\cup\mathfrak{c}_{ik})(\mathfrak{a}_j\cup\mathfrak{a}_k)$

$=(((\xi)_{jk}\cup(\mathfrak{u}\cup\mathfrak{a}_i)\mathfrak{c}_{ik}\cup\mathfrak{v})(\mathfrak{a}_j\cup\mathfrak{a}_i)$

$\qquad\cup(\mathfrak{u}\cup\mathfrak{a}_i)\mathfrak{c}_{ik}\cup\mathfrak{c}_{ik})(\mathfrak{a}_j\cup\mathfrak{a}_k)$

$=(((\xi)_{jk}\cup(\mathfrak{u}\cup\mathfrak{a}_i)\mathfrak{c}_{ik}\cup\mathfrak{v})(\mathfrak{a}_j\cup\mathfrak{a}_i\cup(\mathfrak{u}\cup\mathfrak{a}_i)\mathfrak{c}_{ik})$

$\qquad\cup\mathfrak{c}_{ik})(\mathfrak{a}_j\cup\mathfrak{a}_k)$

$=((\mathfrak{u}\cup\mathfrak{a}_i)\mathfrak{c}_{ik}\cup((\xi)_{jk}\cup\mathfrak{v})(\mathfrak{a}_j\cup\mathfrak{a}_i\cup\mathfrak{u})\cup\mathfrak{c}_{ik})(\mathfrak{a}_j\cup\mathfrak{a}_k)$

$=(\mathfrak{v}\cup(\xi)_{jk})(\mathfrak{a}_j\cup\mathfrak{u})$.

定義15.[13] $(\beta;\gamma',\dots\dots,\gamma^{m-1})=(\mathfrak{a}^{m-1}\cup(\beta)_m)\prod_{j=1}^{m-1}(\mathfrak{a}_j^{m-1}\cup(\gamma^j)_{mj})$

注意. 定理3ノ系ニヨレバ任意ノ元 $\mathfrak{b}\leqq\mathfrak{a}^m$ ハ

$$\mathfrak{b}=\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a}^{m-1}\cup(\mathfrak{a}^{m-1}\cup\mathfrak{b}_m)\prod_{j=1}^{m-1}(\mathfrak{a}_j^{m-1}\cup\mathfrak{b}_{mj})$$

ナル形ニ分解サレル。

$\mathfrak{b}_m=(\beta)_m$, $\mathfrak{b}_{mj}=(\gamma^j)_{mj}$ ナル β, $\gamma',\dots\dots\gamma^{m-1}$

ヲトレバ，上ノ式ノ第二項ハ

$$(\alpha^{m-1}\cup(\beta)_m)\prod_{j=1}^{m-1}(\alpha_j^{m-1}\cup(\gamma^j)'_{mj})$$

トカカレル。之レヲ簡単ノタメ $(\beta;\gamma',\cdots\cdots,\gamma^{m-1})$ デ表ハスノデアル。

Lemma 27. $\beta^2=\beta$ ナラバ

$$a_m\cup(\beta;\gamma',\cdots\cdots,\gamma^{m-1})=\alpha_m\cup(1;\gamma'\beta,\cdots\cdots,\gamma^{m-1}\beta)$$

証明: Lemma 26, i) 及ビ Lemma 1, iii) ニヨッテ

$$(1;\gamma'\beta,\cdots\cdots,\gamma^{m-1}\beta)=\prod_{i=1}^{m-1}(\alpha_i^{m-1}\cup(\gamma^i\beta)_{mi})$$

$$=\prod_{i=1}^{m-1}(\alpha_i^{m-1}\cup(\gamma^i)_{mi}(\alpha_i\cup(\beta)_m)\cup(1-\beta)_m)$$

$$=\prod_{i=1}^{m-1}(\alpha_i^{m-1}\cup(\gamma^i)_{mi}(\alpha_i\cup(\beta)_m))\cup(1-\beta)_m$$

然ルニ $(\beta;\gamma',\cdots\cdots,\gamma^{m-1})=\prod_{i=1}^{m-1}(\alpha_i^{m-1}\cup\alpha_i\cup(\beta)_m)(\alpha_i^{m-1}\cup(\gamma^i)_{mi})$

$$=\prod_{i=1}^{m-1}(\alpha_i^{m-1}\cup(\gamma^i)_{mi}(\alpha_m\cup\alpha_i)(\alpha_i^{m-1}\cup\alpha_i\cup(\beta)_m))$$

$$=\prod_{i=1}^{m-1}(\alpha_i^{m-1}\cup(\gamma^i)_{mi}(\alpha_i\cup(\beta)_m))$$

故ニ $(1;\gamma'\beta,\cdots\cdots,\gamma^{m-1})=(\beta;\gamma',\cdots\cdots,\gamma^{m-1})\cup(1-\beta)_m.$

コノデ両辺ニ α_m ヲ加ヘレバヨイ。

Lemma 28. $(\alpha_k\cup(\beta)_{ij})(\alpha_i\cup(\gamma)_{jk})$

$$=(\alpha_k\cup(\beta)_{ij})(\alpha_j\cup(-\gamma\beta)_{ik})$$

証明: Lemma 19 ニヨッテ

$$((\gamma)_{jk}\cup((-\gamma\beta)_{ik}\cup\alpha_j)((\beta)_{ij}\cup\alpha_k))(\alpha_i\cup\alpha_k)=\alpha_i$$

両辺ニ $(\gamma)_{jk}$ ヲ加ヘレバ

$$(\gamma)_{jk} \cup ((-\gamma\beta)_{ik} \cup \alpha_j)((\beta)_{ij} \cup \alpha_k) = \alpha_i \cup (\gamma)_{jk}$$

両辺ニ $(\alpha_k \cup (\beta)_{ij})$ ヲカケレバ

$$((-\gamma\beta)_{ik} \cup \alpha_j)((\beta)_{ij} \cup \alpha_k) \cup (\gamma)_{jk}(\alpha_k \cup (\beta)_{ij})$$
$$= (\alpha_i \cup (\gamma)_{jk})(\alpha_k \cup (\beta)_{ij})$$

ココデ $(\gamma)_{jk}(\alpha_k \cup (\beta)_{ij}) = (\gamma)_{jk}(\alpha_k \cup \alpha_j)(\alpha_k \cup (\beta)_{ij})$

$$= (\gamma)_{jk}(\alpha_k \cup (\beta)_{ij}(\alpha_k \cup \alpha_j)) = (\gamma)_{jk}\alpha_k = 0.$$

故ニ Lemma ノ式ヲ得ル。

Lemma 29. $\alpha_{1i}^{m} = \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{m} \alpha_j$ トスレバ

$$\alpha_m \cup (1;\ \gamma',\ \eta^2\gamma',\ \cdots\cdots,\ \eta^{m-1}\gamma')$$
$$= \alpha_m \cup (\alpha_1^{m-1} \cup (\gamma^2)_{1})\prod_{i=2}^{m-1}(\alpha_{1i}^{m-1} \cup (-\eta^i)_{1i})$$

証明： $n \geqq m > 2$ トスル.

$$(1;\ \gamma^1,\ \eta^2\gamma',\ \cdots\cdots,\ \eta^{m-1}\gamma')$$
$$= (\alpha_1^{m-1} \cup (\gamma')_{m1})\prod_{i=2}^{m-1}(\alpha_i^{m-1} \cup (\eta^i\gamma')_{mi})$$
$$= \prod_{i=2}^{m-1}(\alpha_{1i}^{m-1} \cup \alpha_i \cup (\gamma')_{m1})(\alpha_{1i}^{m-1} \cup \alpha_1 \cup (\eta^i\gamma')_{mi})$$
$$= \prod_{i=2}^{m-1}(\alpha_{1i}^{m-1} \cup (\alpha_i \cup (\gamma')_{m1})(\alpha_1 \cup (\eta^i\gamma')_{mi}))$$
$$= \prod_{i=2}^{m-1}(\alpha_{1i}^{m-1} \cup (\alpha_i \cup (\gamma')_{m1})(\alpha_m \cup (-\eta^i)_{1i}))$$
$$= \prod_{i=2}^{m-1}(\alpha_{1i}^{m-1} \cup \alpha_i \cup (\gamma')_{m1})(\alpha_{1i}^{m-1} \cup \alpha_m \cup (-\eta^i)_{1i})$$

$$\alpha_m \cup (1;\ \gamma',\ \eta^2\gamma',\ \cdots\cdots\ \eta^{m-1}\gamma')$$

$$= \mathfrak{a}_m \cup \left(\mathfrak{a}_1^m \cup (\gamma')_{m1} \right) \prod_{i=2}^{m-1} \left(\mathfrak{a}_{1i}^m \cup (-\eta^i)_{1i} \right)$$

$$= \mathfrak{a}_m \cup \left(\mathfrak{a}_1^{m-1} \cup (\gamma')_{m1} \cup \mathfrak{a}_m \right) \prod_{i=2}^{m-1} \left(\mathfrak{a}_{1i}^m \cup (-\eta^i)_{1i} \right)$$

$$= \mathfrak{a}_m \cup \left(\mathfrak{a}_1^m \cup (\gamma')_1 \right) \prod_{i=2}^{m-1} \left(\mathfrak{a}_{1i}^m \cup (-\eta^i)_{1i} \right)$$

$$= \mathfrak{a}_m \cup \left(\mathfrak{a}_1^{m-1} \cup (\gamma')_1 \prod_{i=2}^{m-1} \left(\mathfrak{a}_{1i}^{m-1} \cup (-\eta^i)_{1i} \right) \right.$$

$m=2$ ノトキハ $\mathfrak{a}_2 \cup (1; \gamma') = \mathfrak{a}_2 \cup (\gamma')_{21} = \mathfrak{a}_2 \cup (\gamma')_1$

Lemma 30.

$$\mathfrak{a}_m \cup (1; 0, \varepsilon^2, \dots\dots, \varepsilon^{m-1})$$

$$= \mathfrak{a}_m \cup \mathfrak{a}_1^{m-1} \left(\prod_{i=2}^{m-1} \left(\mathfrak{a}_{1i}^{m-1} \cup (\varepsilon^i)_{1i} \right) \cup \mathfrak{a}_1 \right)$$

証明: $\mathfrak{a}_m \cup (1; 0, \varepsilon^2, \dots\dots, \varepsilon^{m-1})$

$$= \mathfrak{a}_m \cup \mathfrak{a}_1^m \prod_{i=2}^{m-1} \left(\mathfrak{a}_i^{m-1} \cup (\varepsilon^i)_{mi} \right)$$

$$= \mathfrak{a}_m \cup \left(\mathfrak{a}_1^{m-1} \cup \mathfrak{a}_m \right) \left(\prod_{i=2}^{m-1} \left(\mathfrak{a}_{i1}^{m-1} \cup (\varepsilon^i)_{mi} \right) \cup \mathfrak{a}_m \cup \mathfrak{a}_1 \right)$$

$$= \mathfrak{a}_m \cup \mathfrak{a}_1^{m-1} \left(\prod_{i=2}^{m-1} \left(\mathfrak{a}_{i,1}^{m-1} \cup (\varepsilon^i)_{mi} \right) \cup \mathfrak{a}_1 \cup \mathfrak{a}_m \right)$$

$$= \mathfrak{a}_m \cup \left[\mathfrak{a}_1^{m-1} \left(\prod_{i=2}^{m-1} \left(\mathfrak{a}_{i,1}^{m-1} \cup (\varepsilon^i)_{mi} \right) \cup \mathfrak{a}_m \right) \right] P \begin{pmatrix} 2 \cdots\cdots m-1 & m \\ 2 \cdots\cdots m-1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \mathfrak{a}_m \cup \mathfrak{a}_1^{m-1} \left(\prod_{i=2}^{m-1} \left(\mathfrak{a}_{i,1}^{m-1} \cup (\varepsilon^i)_{mi} \right) \cup \mathfrak{a}_1 \right)$$

Lemma 31.

$\mathfrak{a}_m \cup (1; \gamma', \dots\dots, \gamma^{m-1}) = \mathfrak{a}_m \cup (1; \gamma', \eta^2 \gamma', \dots$
$\dots, \eta^{m-1} \gamma') \cup (1; 0, \varepsilon^2, \dots\dots \varepsilon^{m-1})$

但シ $(\gamma')_e = (\beta)_e$, $\beta^2 = \beta$; $\gamma^i \beta = \eta^i \gamma'$,

$\gamma^i (1-\beta) = \varepsilon_i$

証明: $\mathfrak{a}_m \cup (1; \gamma', \cdots\cdots, \gamma^{m-1})$

$$= \mathfrak{a}_m \cup (1; \gamma'\beta, \cdots\cdots, \gamma^{m-1}\beta) \cup (1; \gamma'(1-\beta), \cdots\cdots \gamma^{m-1}(1-\beta))$$

$$= \mathfrak{a}_m \cup (1; \gamma', \eta^2\gamma', \cdots\cdots, \eta^{m-1}\gamma') \cup (1; 0, \varepsilon^2, \cdots\cdots, \varepsilon^{m-1})$$

定理 7.[14)] $(\beta)_\gamma = (\bar{\beta})_\gamma$, $\bar{\beta}^2 = \bar{\beta}$; $(\gamma'\bar{\beta})_e = (\beta^*)_e$, $\beta^{*2} = \beta^*$; $\gamma^i \bar{\beta} \beta^* = \eta^i \gamma' \bar{\beta}$, $\varepsilon_i = \gamma^i \bar{\beta} (1-\beta^*)$ トオケバ

$$\mathfrak{a}^{m-1}(\mathfrak{a}_m \cup (\beta; \gamma', \cdots\cdots \gamma^{m-1}))$$

$$= \left(\mathfrak{a}_1^{m-1} \cup (\gamma'\bar{\beta})_1\right) \prod_{i=2}^{m-1} \left(\mathfrak{a}_1^{m-1} \cup (-\eta^i)_{1i}\right) \cup \mathfrak{a}_1^{m-1} \left(\prod_{i=2}^{m-1} \left(\mathfrak{a}_1^{m-1} \cup (\varepsilon^i)_{1i}\right) \cup \mathfrak{a}_1 \right)$$

証明: $\mathfrak{a}_m \cup (\beta; \gamma', \cdots\cdots \gamma^{m-1}) = \mathfrak{a}_m \cup (1; \gamma'\bar{\beta}, \cdots\cdots \gamma^{m-1}\bar{\beta})$

$$= \mathfrak{a}_m \cup (1; \gamma'\bar{\beta}, \eta^2\gamma'\bar{\beta}, \cdots\cdots, \eta^{m-1}\gamma'\bar{\beta}) \cup (1; 0, \varepsilon^2, \cdots\cdots, \varepsilon^{m-1})$$

$$= \mathfrak{a}_m \cup \left(\mathfrak{a}_1^{m-1} \cup (\gamma'\bar{\beta})_1\right) \prod_{i=2}^{m-1} \left(\mathfrak{a}_1^{m-1} \cup (-\eta^i)_{1i}\right)$$

$$\cup \mathfrak{a}_1^{m-1} \left(\prod_{i=2}^{m-1} \left(\mathfrak{a}_1^{m-1} \cup (\varepsilon^i)_{1i}\right) \cup \mathfrak{a}_1 \right)$$

コノ両辺ニ $\mathfrak{a}^{m-1}$ ヲカケレバ定理ノ式ヲ得ル。

—— (ツヅク) ——